

Françoise Delpérée



Voyage onirique au Pays des Polyèdres

47^{ème} Congrès de la SBPMef

23-25 août 2022

Pour « Maths en Images, Image des Maths », le thème du congrès de cette année, Pierre Bolly m'a proposé de présenter quelques-unes des mes oeuvres réalisées ces dernières années sur le thème des polyèdres. C'est avec joie que j'ai accepté !

Depuis quelques années, en effet, je peins à l'acrylique, à l'aquarelle, des solides de tous les formats, solides de Platon, d'Archimède ou de Catalan, solides de Kepler-Poinsot, tantôt cristallins, tantôt irisés, s'agencant et se recombinaient avec le minéral, végétal ou animal.

Il m'a semblé approprié de partager avec vous, le temps d'une pause, mes rêveries en contemplant la Nature.

Je vous propose de partir à la découverte des polyèdres. Pour vous y aider, voici une petite quinzaine de fiches.

Chacune d'entre elles se rapporte à un tableau bien précis. Elle présente un ou deux polyèdres, parfois leurs noms, quelques-unes de leurs propriétés et les opérations utilisées pour leur construction...

Bon voyage au Pays des Polyèdres !

Françoise Delpérée

VERS LES POLYÈDRES



On désignera par

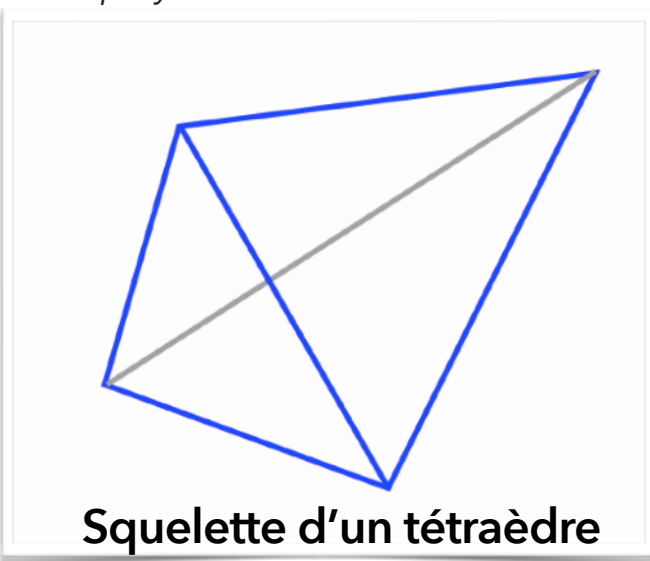
- **polyèdre** (du grec poly-, beaucoup et -hedra, siège, face) une forme géométrique à 3 dimensions délimitée par des faces, des arêtes et des sommets;
- **face**, une région plane limitée par un circuit d'arêtes;
- **arête**, un segment de droite joignant un sommet à un autre et une face à une autre;
- **sommet**, un point, coin des arêtes et des faces, du polyèdre.

On nommera également

- **solide**, l'ensemble des points situés à l'intérieur de la surface polyédrique;
- **surface polyédrique**, l'ensemble des faces du polyèdre;
- **squelette polyédrique**, l'ensemble des arêtes du polyèdre.

Dans ce cadre,

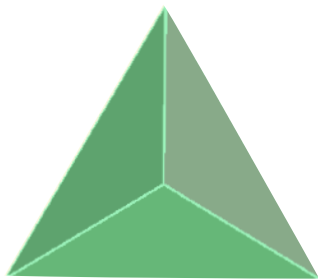
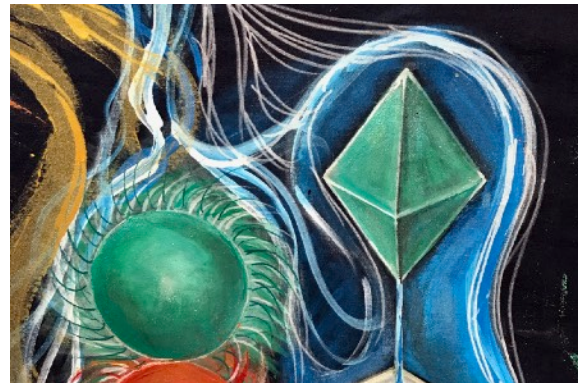
- un polyèdre contient au moins 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes;
- le **tétraèdre**, polyèdre à 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes, est le « plus petit » des polyèdres.



Squelette d'un tétraèdre

Etymologie	tétra-, quatre et -èdre, face
Sommets	4 (degré 3)
Arêtes	6
Famille(s)	pyramides à base triangulaire
Propriété(s)	convexe
Construction	chaque sommet est relié à tous les autres par une arête

TÉTRAÈDRES RÉGULIERS ET DUALITE



Tétraèdre régulier

Etymologie	<i>tétra-</i> , quatre et <i>-èdre</i> , face
Faces	4 triangles équilatéraux (iso)
Sommets	4 (degré 3)
Arêtes	6
Famille(s)	pyramides à base triangulaire, solide de Platon
Propriété(s)	convexe, régulier, auto dual
Etudié par	Pythagore (†-495)
Construction	chaque sommet est relié à tous les autres par une arête

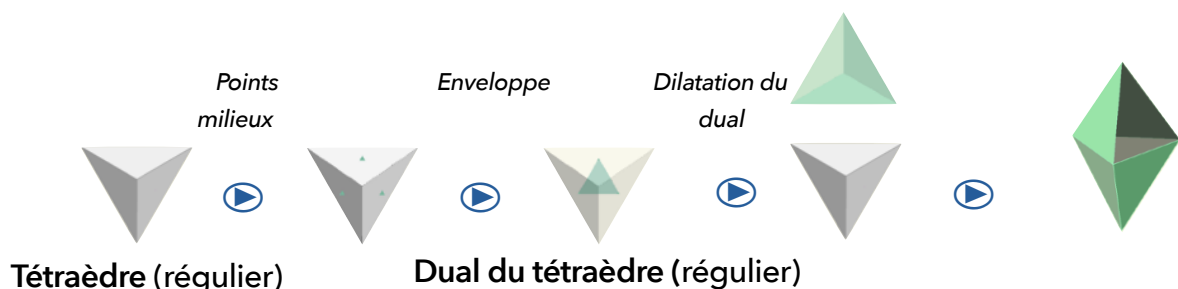


Dipyramide triangulaire

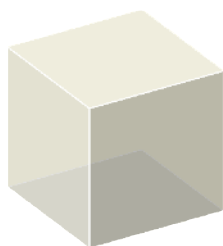
Etymologie	<i>di-</i> , deux et <i>pyramis</i> , gâteau à la farine de blé
Faces	6 triangles équilatéraux (iso)
Sommets	5 (degré 3 et 4)
Arêtes	12
Famille(s)	diamant triangulaire, solide de Johnson (J12)
Propriété(s)	convexe, semi-régulier, deltaèdre
Etudié par	Johnson (1966)
Construction	deux tétraèdres juxtaposés base à base

Deux polyèdres sont **duaux** si les faces de l'un sont en correspondance avec les sommets de l'autre en respectant les propriétés d'adjacence et inversement.

Pour les **solides de Platon** (les 5 seuls polyèdres réguliers convexes), la technique la plus simple est de relier les centres des faces adjacentes.

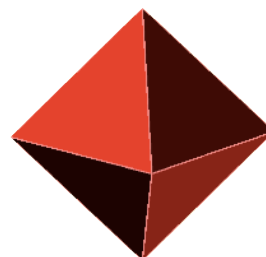


LE CUBE (ET SON DUAL)



Cube ou Hexaèdre

Etymologie	<i>kúbos</i> , dé <i>hexa-</i> , six et <i>-èdre</i> , face
Faces	6 carrés
Sommets	8 (degré 3)
Arêtes	12
Famille(s)	antidiamant, prisme droit solide de Platon (Hexaèdre régulier)
Propriété(s)	convexe, régulier, zonoèdre
Etudié par	Pythagore (†-495)
Construction	à parti du tétraèdre régulier

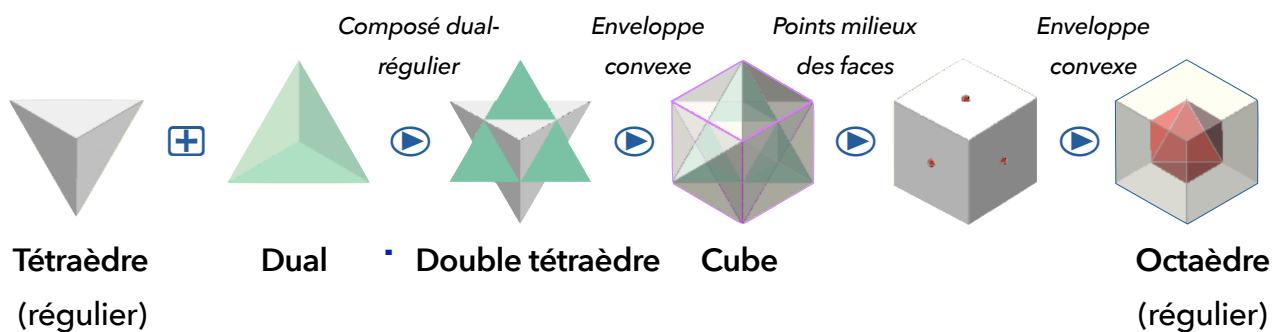


Octaèdre régulier

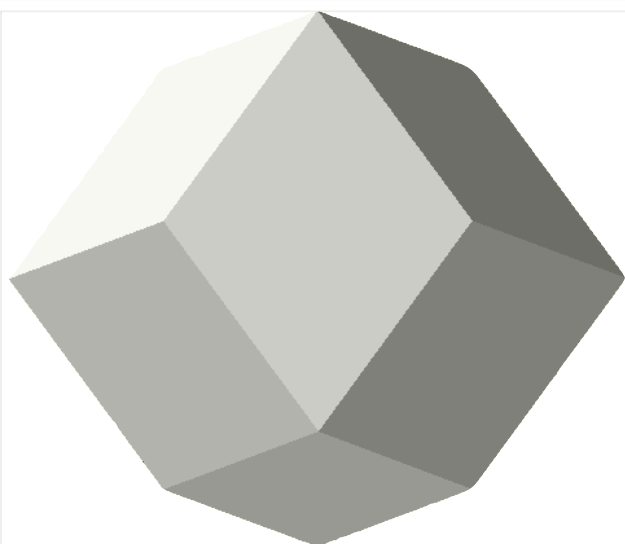
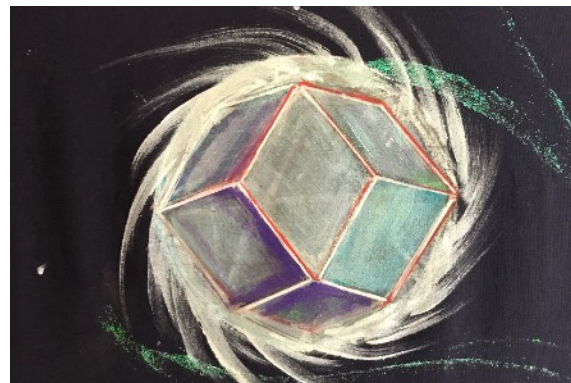
Etymologie	<i>octa-</i> , huit et <i>-èdre</i> , face
Faces	8 triangles équilatéraux
Sommets	6 (degré 4)
Arêtes	12
Famille(s)	antiprisme triangulaire, bipyramide carrée, solide de Platon
Propriété(s)	convexe, régulier, deltaèdre
Etudié par	Pythagore (†-495)
Construction	à partir du tétraèdre régulier

La **coque**, enveloppe convexe du composé du tétraèdre et son dual, est le **cube**.

Le **noyau**, intersection des deux polyèdres duaux, est l'**octaèdre régulier**.



LE DODÉCAÈDRE RHOMBIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE



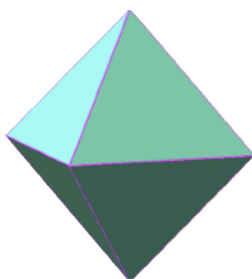
Dodécaèdre rhombique de première espèce

Étymologie	<i>dodeca-</i> , douze <i>rhombe</i> , losange
Faces	12 losanges d'argent
Sommets	14 (degré 3 et 4)
Arêtes	24
Famille(s)	Solide de Catalan, zonoèdre, polyèdre rhombique
Propriété(s)	Convexe de faces uniformes
Étudié par	Catalan (1865)
Construction	à partir du composé dual-régulier cube-octaèdre

Le **dodécaèdre rhombique**, obtenu par dual-composition du cube et de l'octaèdre régulier, possède douze faces rhombiques identiques dont le rapport des diagonales vaut $\sqrt{2}$.



Hexaèdre
(régulier convexe)
Solide de Platon

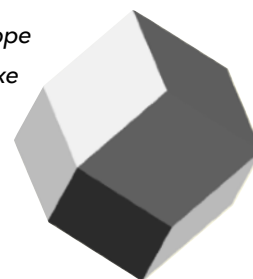


Octaèdre
(régulier convexe)
Solide de Platon



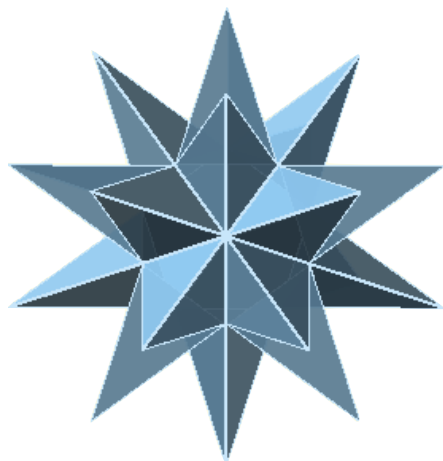
Composé dual-régulier du cube et de l'octaèdre

Enveloppe convexe

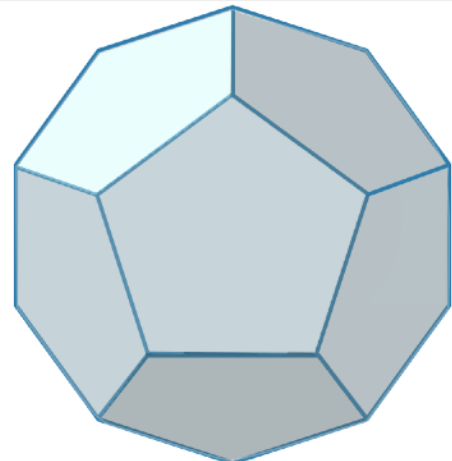


Dodécaèdre rhombique
(de première espèce)
Solide de Catalan

GRAND DODÉCAÈDRE ÉTOILÉ ET DODÉCAÈDRE



Grand dodécaèdre étoilé

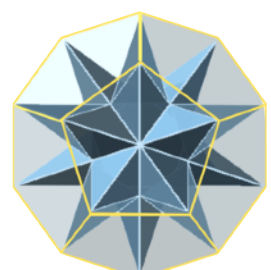
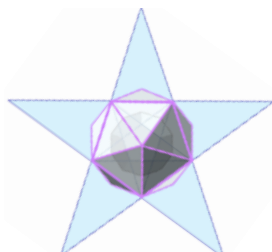
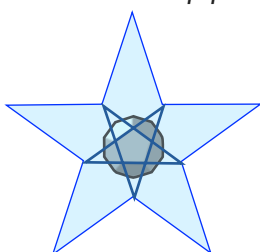


Dodécaèdre

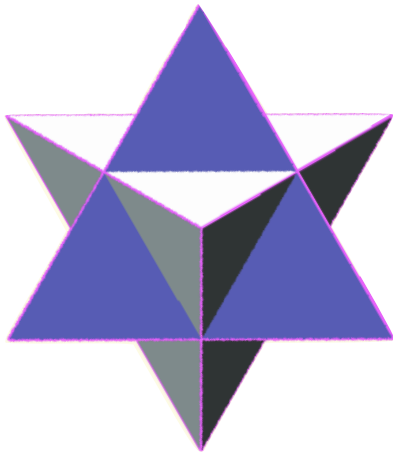
Étymologie	<i>dodeca-</i> , douze et <i>-èdre</i> , face
Faces	12 faces pentagrammiques
Sommets	20
Arêtes	30
Famille(s)	Solide de Kepler-Poinsot
Propriété(s)	régulier non convexe
Étudié par	Kepler (1619)
Construction	stellation du dodécaèdre ou de l'icosaèdre

Étymologie	<i>dodeca-</i> , douze et <i>-èdre</i> , face
Faces	12 faces pentagonales
Sommets	20
Arêtes	30
Famille(s)	Solide de Platon
Propriété(s)	régulier convexe
Étudié par	Pythagore (†-495)
Construction	enveloppe du grand dodécaèdre étoilé

Le **grand dodécaèdre étoilé** est un des 4 seuls polyèdres réguliers non convexes, les **solides de Kepler-Poinsot** . Il s'obtient par **stellation** de l'icosaèdre ou du dodécaèdre réguliers en prolongeant les arêtes ou les faces. Son enveloppe convexe est un **dodécaèdre régulier**.



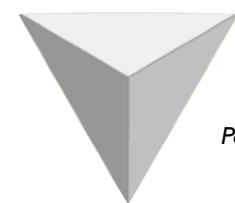
STELLA OCTANGULA OU DOUBLE TÉTRAÈDRE



Stella octangula

Etymologie	<i>stella</i> , étoile, <i>octo-</i> , huit et <i>angula</i> , angle
Faces	8 triangles équilatéraux
Sommets	8
Arêtes	12
Famille(s)	
Propriété(s)	Non convexe, régulier
Etudié par	Luca Pacioli (1509), Kepler (1619)
Construction	Composé dual-régulier du tétraèdre (auto-dual)

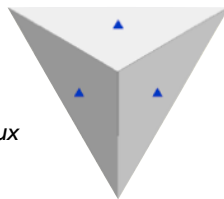
Ce polyèdre s'obtient par **composition** du tétraèdre régulier et de son **dual**.
Le tétraèdre étant son propre dual, ce composé est également appelé **double tétraèdre**.



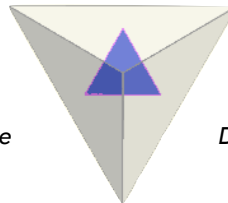
Tétraèdre régulier



Points milieux
des faces



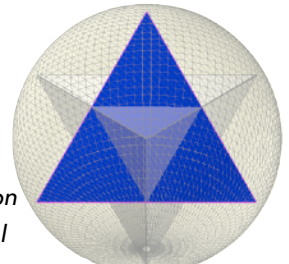
Enveloppe
convexe



Dual



Dilatation
du dual



Double tétraèdre

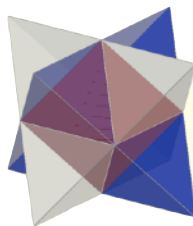
Stella octangula ou **octaèdre étoilé** peut être obtenu également par **stellation**,
en prolongeant les faces de l'octaèdre jusqu'à ce qu'elles se rencontrent..



Octaèdre
(régulier convexe)



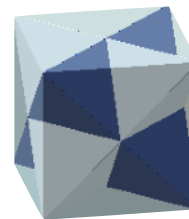
Prolongation
des faces



**Stellation de
l'octaèdre**

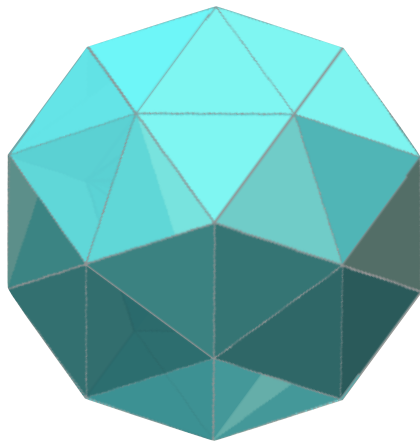


Enveloppe
convexe



Hexaèdre (cube)
(régulier convexe)

LE DODÉCAÈDRE AUGMENTÉ DE PYRAMIDES PENTAGONALES



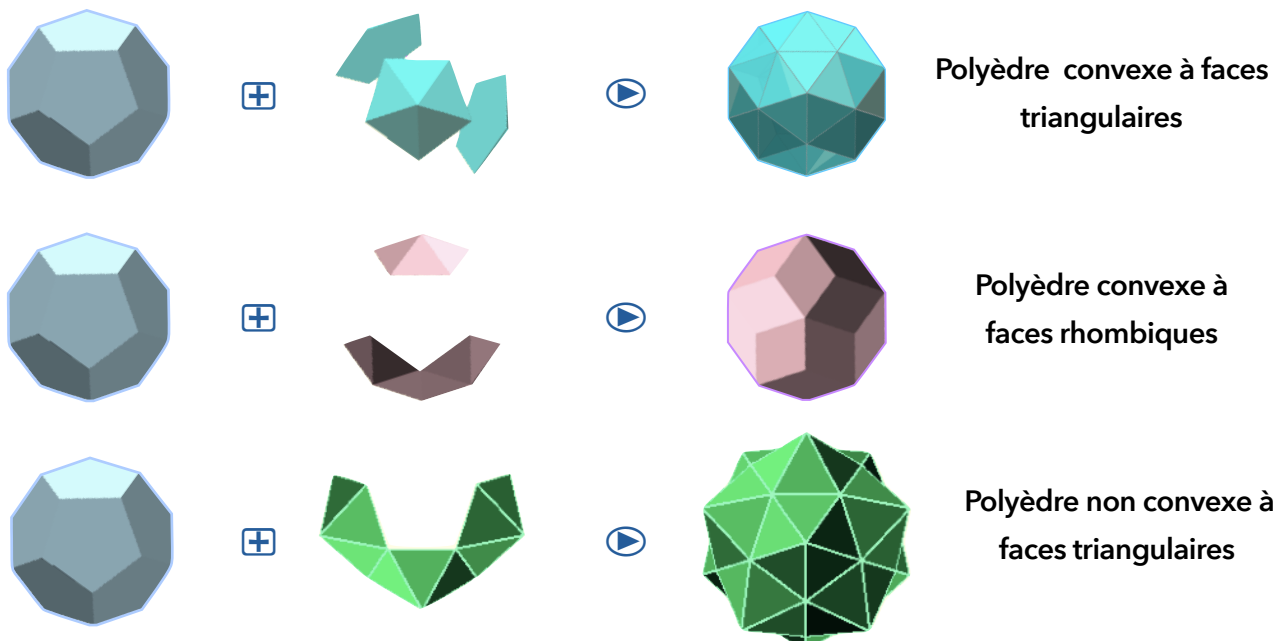
Dodécaèdre augmenté de 12 pyramides pentagonales droites

Faces	60 triangles isocèles
Sommets	32 (5 ou 6 par sommet)
Arêtes	40
Famille(s)	zonoèdre
Propriété(s)	Convexe tant que la hauteur est inférieure à celle amenant au triacontaèdre.
Construction	à partir du dodécaèdre régulier convexe, augmenté sur chacune de ses faces d'une pyramide pentagonale droite

Un **polyèdre augmenté** est un polyèdre résultant du collage sur une de ses faces d'un autre polyèdre ayant une face isométrique à la sienne.

Une **pyramide pentagonale droite** est un polyèdre à base pentagonale dont le sommet est situé à la perpendiculaire du centre de la base.

Selon la hauteur de la pyramide, le polyèdre augmenté a 3 allures possibles



LE PETIT DODÉCAÈDRE ÉTOILÉ



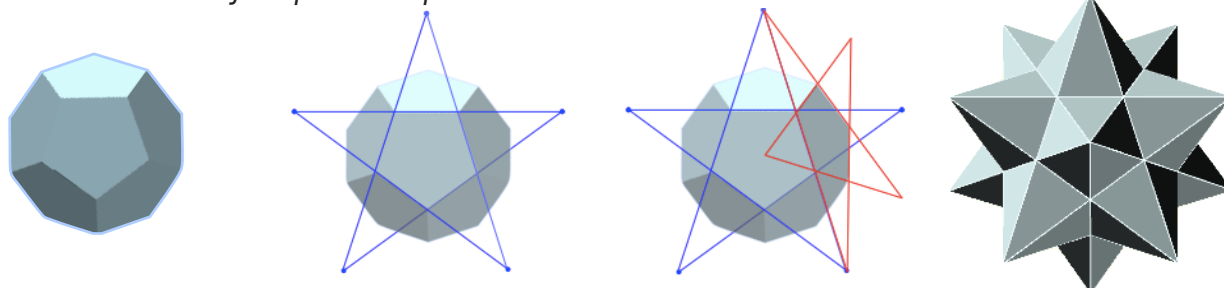
Petit dodécaèdre étoilé

Étymologie	<i>dodeca-</i> , douze et <i>-èdre</i> , face
Faces	12 faces pentagrammiques;
Sommets	12 sommets de pyramides coïncidant avec ceux de l'icosaèdre
Arêtes	30 (arêtes des pentagrammes)
Famille(s)	Solide de Kepler-Poinsot
Propriété(s)	Non-convexe, régulier
Étudié par	Kepler (1619), Poinsot (1809)
Construction	Première stellation du dodécaèdre régulier convexe

Le **petit dodécaèdre étoilé** peut être construit à partir du dodécaèdre (régulier), en l'augmentant de 12 pyramides pentagonales droites.



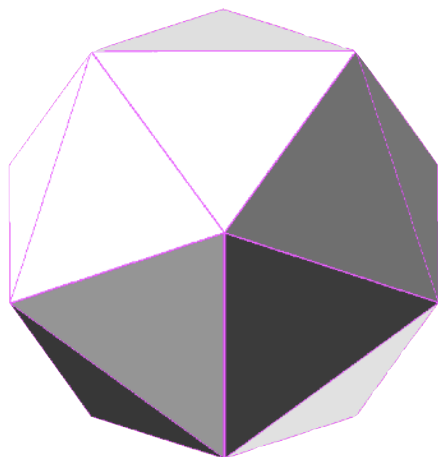
Il peut être également construit à partir d'un dodécaèdre en prolongeant les arêtes de celui-ci jusqu'à ce qu'elles se rencontrent.



*Prolongation des arêtes
de la face avant*

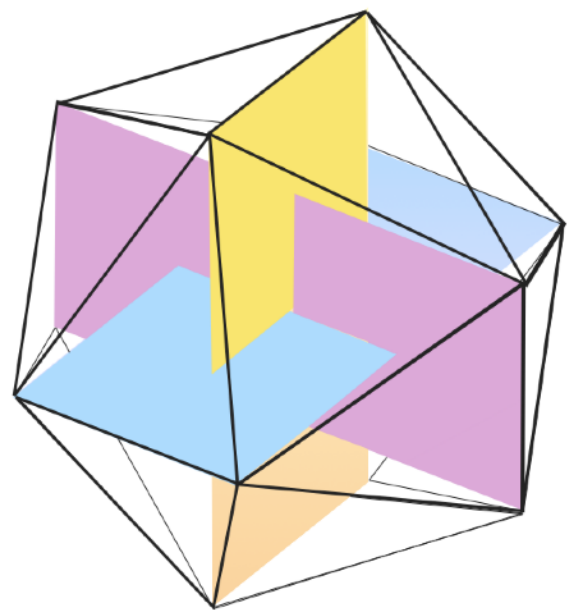
*Prolongation des arêtes de la
face latérale droite*

L'ICOSAÈDRE, DUAL DU DODÉCAÈDRE



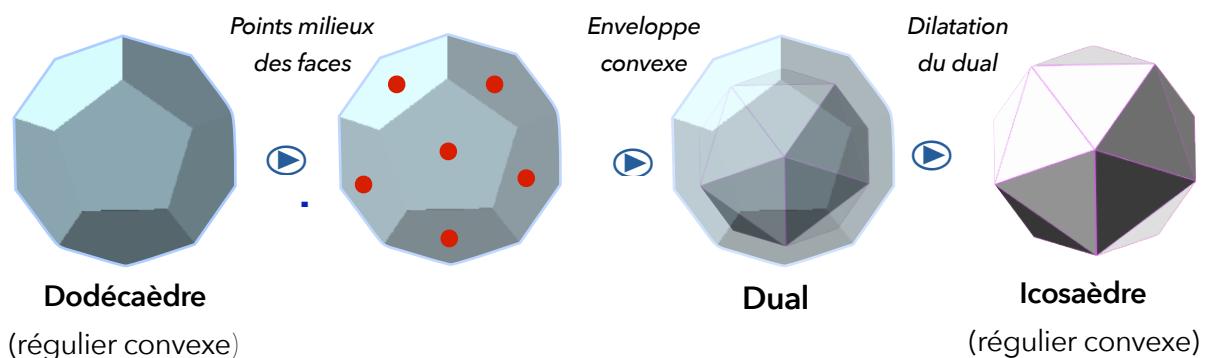
Icosaèdre (régulier)

Etymologie	<i>icosa-</i> , vingt et <i>-èdre</i> , face
Faces	20 triangles équilatéraux
Sommets	12
Arêtes	30
Famille(s)	Solide de Platon
Propriété(s)	régulier convexe
Étudié par	Théétète d'Athènes (†-369)
Construction	A partir du dodécaèdre



Les coins de 3 rectangles d'or perpendiculaires deux à deux déterminent les 12 sommets de l'icosaèdre régulier convexe.

L'**icosaèdre (régulier convexe)** peut être construit à partir du dodécaèdre régulier, son dual, en reliant les centres des 12 faces pentagonales de celui-ci.



LE COMPOSÉ DUAL- RÉGULIER DE L'ICOSAÈDRE ET DU DODÉCAÈDRE



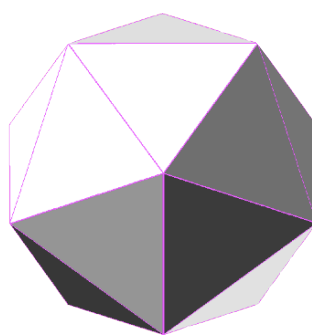
**Composé dual-régulier de
l'icosaèdre et du dodécaèdre**

Faces	20 triangles équilatéraux; 12 pentagones
Sommets	32 (degré 3 et 5)
Arêtes	60
Famille(s)	
Propriété(s)	Non convexe; première stellation de l'icosidodécaèdre; son enveloppe convexe est le triacontaèdre et son noyau, l'icosidodécaèdre
Etudié par	
Construction	Composé de l'icosaèdre et du dodécaèdre (milieu des arêtes)

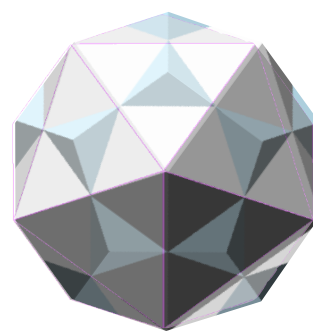
Un **composé dual-régulier** est composé d'un polyèdre régulier (un des *solides de Platon* ou des *solides de Kepler-Poinsot*) et de son dual régulier, arrangés réciproquement sur une sphère intermédiaire commune, telle que l'arête de l'un coupe l'arête duale de l'autre.



Dodécaèdre
(régulier convexe)

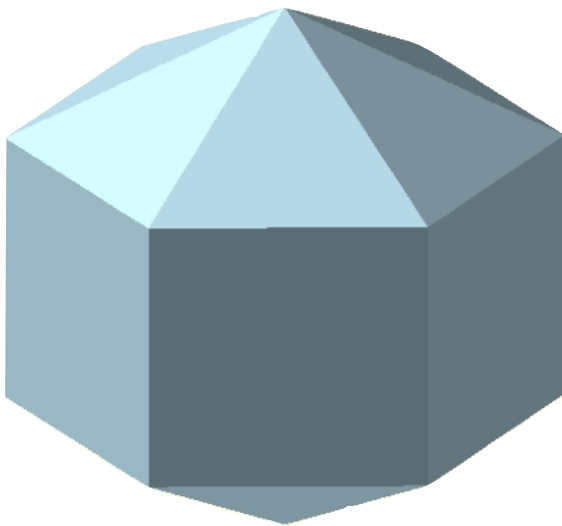
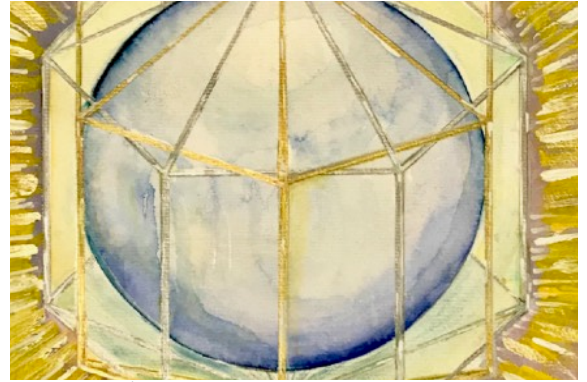


Icosaèdre
(régulier convexe)



Composé dual-régulier

DEUX SQUELETES D'UNE DIPYRAMIDE HEXAGONALE ALLONGÉE

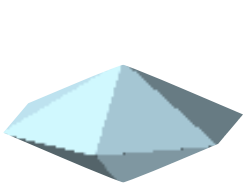


**Dipyramide hexagonale
allongée**

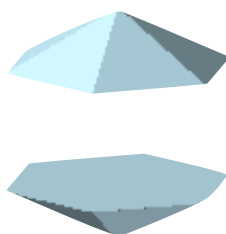
Faces	18: 6 carrés; 12 triangles isocèles
Sommets	14 (degré 4 ou 6)
Arêtes	30
Famille(s)	Dipyramides n-gonales allongées
Propriété(s)	Convexe
Etudié par	Johnson
Construction	à partir d'une dipyramide hexagonale

Un **diamant** (ou *bipyramide*, ou **dipyramide**) est un polyèdre constitué de deux pyramides symétriques dont la même base forme un polygone régulier.

Une **dipyramide allongée** est un polyèdre construit par allongement d'une dipyramide *n*-gonale en insérant un prisme *n*-gonal entre ses moitiés



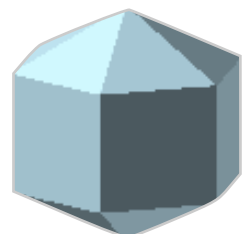
Dipyramide
hexagonale



2 pyramides droites
hexagonales

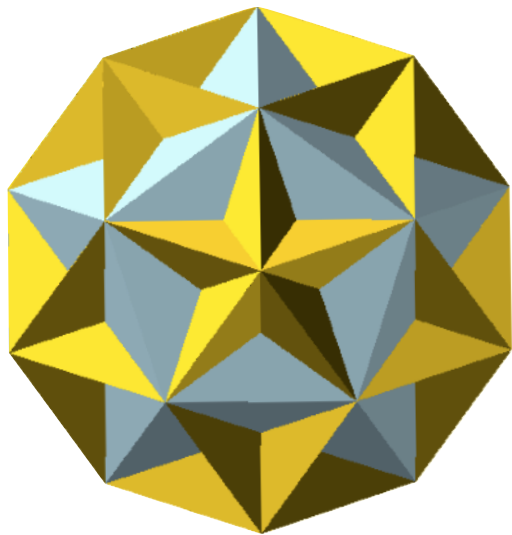


Prisme hexagonal



Dipyramide
hexagonale allongée

LE DODÉCAÈDRE AUGMENTÉ DE PYRAMIDES PENTAGRAMMIQUES

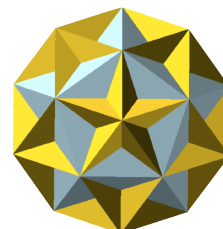


**Dodécaèdre augmenté de pyramides
pentagrammiques droites**

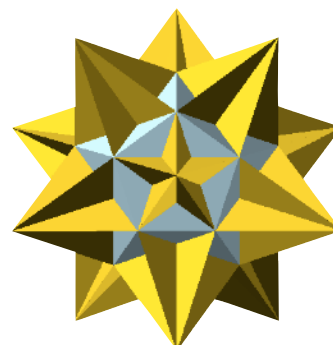
Faces	12 pentagones; 12x5 triangles isocèles
Sommets	32
Arêtes	
Famille(s)	
Propriété(s)	non-convexe
Construction	à partir du dodécaèdre régulier convexe, en ajoutant sur chacune de ses faces une pyramide pentagrammique droite

Un **polyèdre augmenté** est un polyèdre résultant du collage sur une de ses faces d'un autre polyèdre ayant une face isométrique à la sienne.

Une **pyramide pentagrammique** (droite) est un polyèdre à base pentagrammique dont le sommet est situé à la perpendiculaire du centre de la base.



**Dodécaèdre
augmenté de 12
pyramides
pentagrammiques**

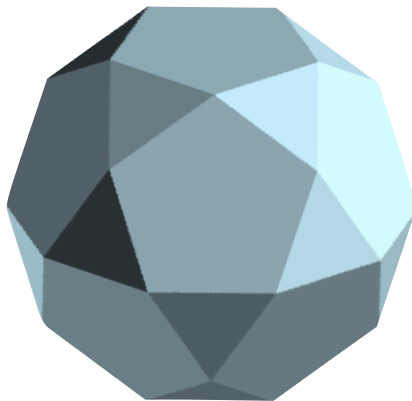


**Grand
icosaèdre
(Kepler-Poinsot)**

LE TRIACONTAÈDRE RHOMBIQUE ET SON DUAL



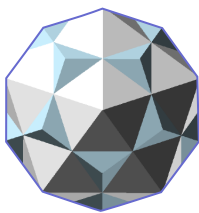
Triacontaèdre rhombique



Icosidodécaèdre

Faces	30 losanges d'or;
Sommets	32 (3 ou 5 par sommet)
Arêtes	60
Famille(s)	Solide de Catalan, zonoèdre équilatéral, polyèdre rhombique
Propriété(s)	Convexe, uniformité des faces
Etudié par	Catalan (1862), Kepler (1619)
Construction	à partir du composé dual-régulier de l'icosaèdre et du dodécaèdre

Faces	20 triangles équilatéraux; 12 pentagones réguliers;
Sommets	30 (degré 4)
Arêtes	60
Famille(s)	Solide d'Archimède
Propriété(s)	Convexe, quasi-régulier
Etudié par	Archimède (†-212), ...
Construction	à partir de son dual, le triacontaèdre rhombique



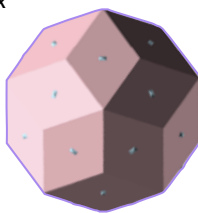
Composé dual-régulier icosaèdre-dodécaèdre

Enveloppe convexe

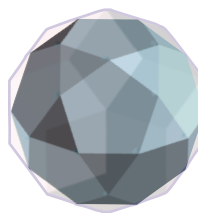


Triacontaèdre rhombique
Solide de Catalan

Points milieux des faces

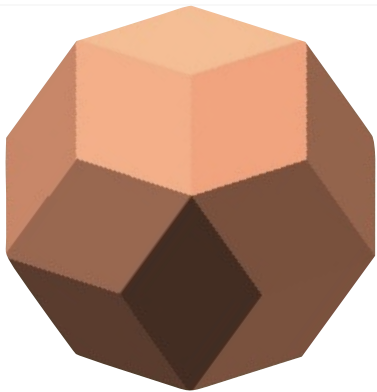


Enveloppe convexe



Icosidodécaèdre
Solide d'Archimède

L'ICOSAÈDRE RHOMBIQUE ET SON DUAL



Icosaèdre rhombique



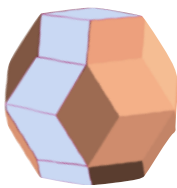
Son dual

Faces	20 Losanges d'or
Sommets	22 (degré 3, 4 ou 5)
Arêtes	40
Famille(s)	zonoèdre équilatéral, polyèdre rhombique
Propriété(s)	inclus dans un sphéroïde aplati
Etudié par	Fedorov (1885), Kepler (1619)
Construction	à partir du triacontaèdre rhombique.

Faces	22: 10 triangles équilatéraux; 10 losanges d'or; 2 pentagones réguliers
Sommets	20 (4 par sommet)
Arêtes	40
Famille(s)	
Propriété(s)	inclus dans un sphéroïde aplati
Etudié par	
Construction	à partir de son dual, l'icosaèdre rhombique.



Triacontaèdre rhombique



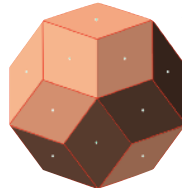
Suppression
d'un anneau
de 10
losanges



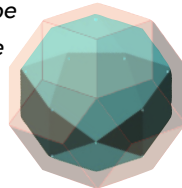
Icosaèdre rhombique



Points milieux
des faces

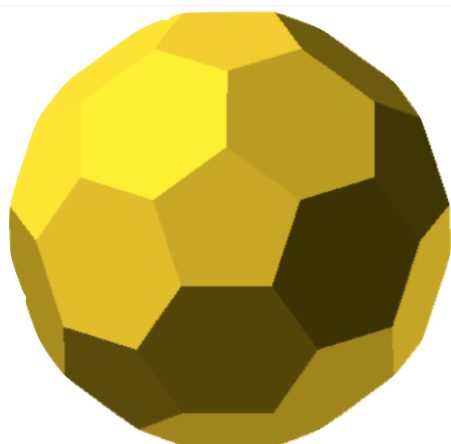


Enveloppe
convexe



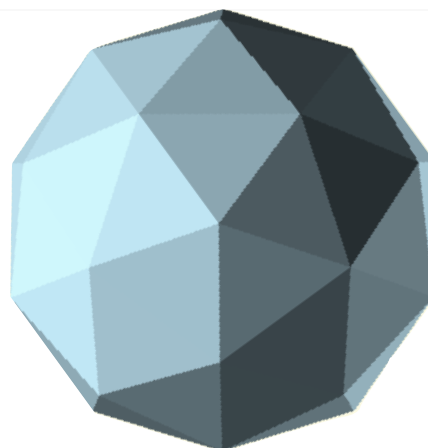
Dual de
l'icosaèdre
rhombique

L'ICOSAÈDRE TRONQUÉ ET SON DUAL



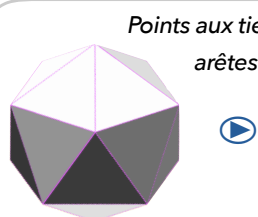
Icosaèdre tronqué

Faces	12 pentagones réguliers; 20 hexagones réguliers
Sommets	60 (degré 3)
Arêtes	90
Famille(s)	Solide d'Archimède
Propriété(s)	Semi-régulier, convexe, zonoèdre
Etudié par	Archimède (†-212), Pappus d'Alexandrie (†350), Luca Pacioli (1498)
Construction	à partir d'un icosaèdre , avec troncature des 12 sommets telle qu'1/3 de chaque arête est enlevé à chaque extrémité.

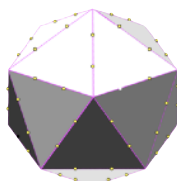


Pentakidodécaèdre

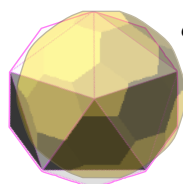
Faces	60 triangles isocèles
Sommets	32 (degré 5 et 6)
Arêtes	90
Famille(s)	Solide de Catalan
Propriété(s)	Convexe, faces uniforme
Etudié par	Catalan (1862)
Construction	à partir des points milieux des faces de son dual, l'icosaèdre tronqué.



Points aux tiers des arêtes

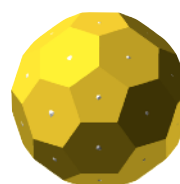


Enveloppe convexe

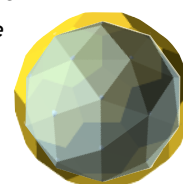


Icosaèdre tronqué

Points milieux des faces



Enveloppe convexe



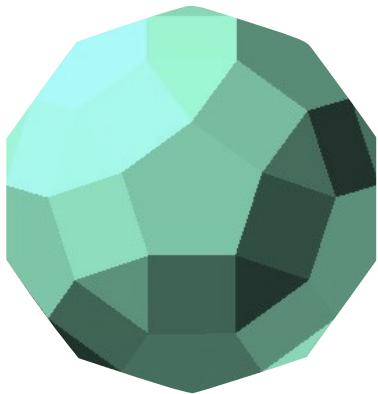
Pentaki-dodécaèdre

Icosaèdre
(régulier convexe)

L'HEXAONTAÈDRE DELTOÏDAL ET SON DUAL

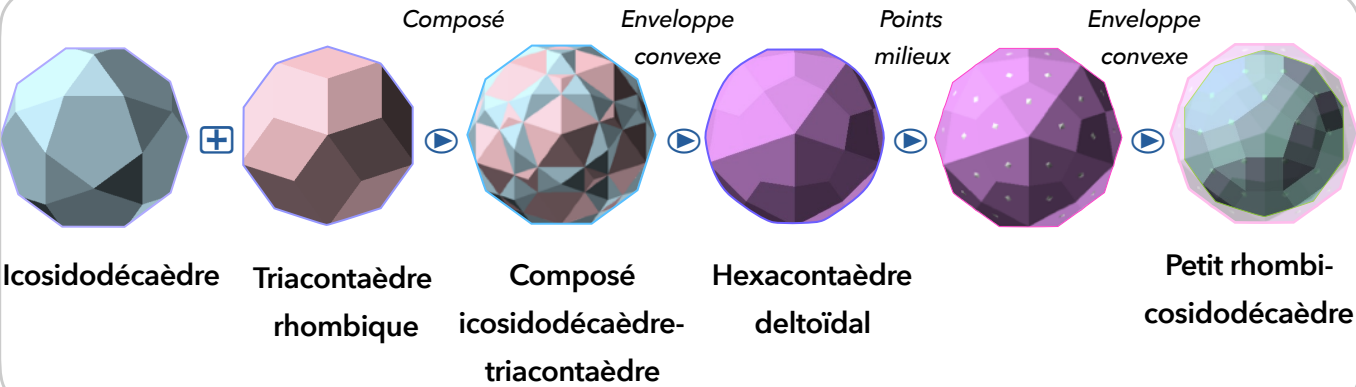


Hexacontaèdre deltoïdal



Petit rhombicosidodécaèdre

Faces	60 cerfs-volants convexes	Faces	62: 20 triangles équilatéraux; 30 carrés; 12 pentagones réguliers;
Sommets	62 (degré 3, 4 et 5)	Sommets	60 (4 par sommet)
Arêtes	120	Arêtes	120
Famille(s)	Solide de Catalan	Famille(s)	Solide d'Archimède
Propriété(s)	Convexe, uniformité des faces	Propriété(s)	Convexe, semi-régulier
Etudié par	Catalan (1862)	Etudié par	Archimède, ...
Construction	à partir du triacontaèdre rhombique et de son dual, l'icosidodécaèdre	Construction	à partir de son dual, l'hexacontaèdre deltoïdal





Françoise Delpérée
francoise.delperee@gmail.com
www.art-and-spirit.info